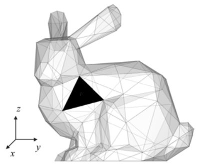
Ebenendarstellungen



Im Rahmen des DiASper-Projekts ist dieses Unterrichtskonzept für den Analytischen Geometrieunterricht der Sekundarstufe 2 entstanden. Das Konzept ist für die 11.-12. Klasse und auf sechs bis acht Unterrichtsstunden ausgelegt.

Inhalt und Verknüpfung zu den Fachanforderungen:

Das STL-Format kann als ein Objekt aufgefasst werden, dass aus den Schnittmengen von je zwei angegebenen Ebenen entsteht. Durch die gegebenen vier Parameter (drei Eckpunkte, Flächennormale) kann es als praxisnahe Verbindung verschiedener bereits bekannter Darstellungsformen von Ebenen thematisiert werden. Zunächst sollten die Schüler*innen die Komponenten des STL-Formats kennenlernen und mit diesen umgehen können (Anforderungsbereich I) sowie auf Basis gegebener Codes erste Figuren identifizieren (Anforderungsbereich II). Auf Basis des entstandenen Wissens können die Schüler*innen anschließend eigene Codestrukturen bauen, um vorgegebene oder selbst modellierte Figuren im STL-Format darzustellen (Anforderungsbereich III). Mithilfe der Thematisierung des STL-Formats können verschiedene Kompetenzen gefördert werden: Die Kompetenz *K4: Mathematische Darstellungen verwenden* kann durch die situationsbedingte Wahl und Reflektion der Darstellungsform von Ebenen und die Kompetenz *K5: Mit Mathematik symbolisch, formal und technisch umgehen* kann durch die Begriffsabgrenzungen bezogen auf die verschiedenen Anwendungsgebiete der Darstellungsformen der Ebenengleichung und die Reflektion von Möglichkeiten und Grenzen der Darstellungen gefördert werden.

Lernvoraussetzungen:

Die Schüler*innen benötigen Wissen über die Darstellung sowie das Ablesen von gegebenen Punkten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Zudem müssen die Schüler*innen Richtungsvektoren bestimmen und darauf aufbauend den Begriff des Normalenvektors kennen und diesen bestimmen können. Ebenso benötigen die Schüler*innen aufbauend auf Punkten im dreidimensionalen Raum, Richtungsvektoren und dem Normalenvektor auch Wissen über verschiedene Ebendarstellungen. So müssen zumindest die Parameter- oder die Dreipunkteform sowie die (Hessesche) Normalenform bekannt sein.

Ziele:

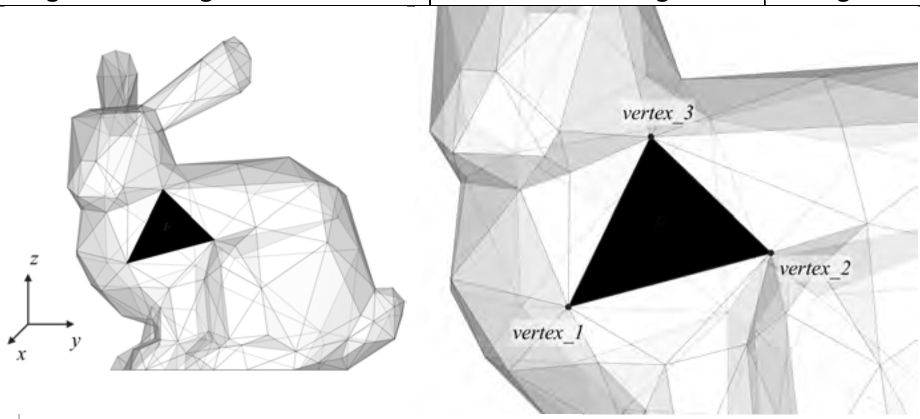
Die Schüler*innen können Ebenen mit Hilfe des STL-Formats darstellen. Zudem können sie Ebenen, die in einer Darstellungsform gegeben sind, in eine andere transformieren. Durch die Erweiterung der bekannten Ebenendarstellungen um das STL-Format sowie die Reflexion der verschiedenen Darstellungen können die Schüler*innen sachgerecht und kontextabhängig verschiedene Darstellungsformen begründet verwenden.

Vorteil des Vorgehens mit Software:

Durch die Auseinandersetzung mit dem STL-Format als Triangulationsinstrument lernen die Schüler*innen eine praxisnähere Darstellung von Ebenen kennen. Hierbei sollte insbesondere die Praktikabilität des Formats fokussiert werden: Mithilfe der Triangulierung kann ein dreidimensionales Objekt approximiert werden. Dies würde zwar ebenfalls über die Definition von Schnitten mithilfe bereits bekannter Ebenendarstellungen möglich sein, aber die geometrischen Informationen könnten dann nicht von Programmen (z.B. CAD-Programme) gelesen oder verarbeitet werden.

Mögliche Aufgaben:

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Aufgabenstellung</th><th>Schüler*innentätigkeiten</th><th>Bezug Fachanforderungen</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">




```
solid STL file
[...]
facet normal
   outer loop
      vertex 1.00000000000000 2.00000000000000 5.50000000000000
      vertex 1.50000000000000 4.50000000000000 6.00000000000000
      vertex 0.70000000000000 3.00000000000000 7.50000000000000
   endloop
endfacet
[...]
endsolid STL file
```

</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Bestimmen Sie die Ebene, in der die Dreiecksfläche liegt. Nutzen Sie dafür die gegebenen Informationen aus dem zu dieser Fläche gehörenden Codeblock, der im STL-Format angegeben ist. Beachten Sie, dass jeder Eckpunkt (vertex) in der Koordinaten- statt in der Vektorschreibweise angegeben wird. Geben Sie die Ebene in der Parameterform an.

Differenzierungsmöglichkeiten:
Geben Sie zunächst die Eckpunkte der Dreiecksfläche in Vektor-schreibweise an.</td><td>Mithilfe der angegebenen Eckpunkte[1] in der STL-Datei kann die Ebene aufgestellt werden, in dem sich die Dreiecksfläche befindet.</td><td>Leitidee:
• Raum und Form

Geförderte mathematische Kompetenzen:
• K4
• K5
• K6

Geförderte digitale Kompetenzen:
• K1.2
• K3.2</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene, in der die Dreiecksfläche liegt, um den Code im STL-Format zu vervollständigen. Tragen Sie</td><td>Der Normalenvektor kann anschließend mithilfe des Kreuzproduktes bestimmt werden.</td><td>Leitidee:
• Raum und Form

Geförderte mathematische Kompetenz:</td></tr>
</table>

[1] Im STL-Format werden Dreiecke als Grundlage des Codes verwendet. Dies geschieht, da bei n-Ecken mit n>3 nicht garantiert ist, dass das n-Eck flach ist, also in einer Ebene liegt. Da wir aber das Objekt durch ebene n-Ecke beschreiben, werden Dreiecke genutzt, da zu jedem Dreieck eine Ebene definiert werden kann, in dem dieses liegt.

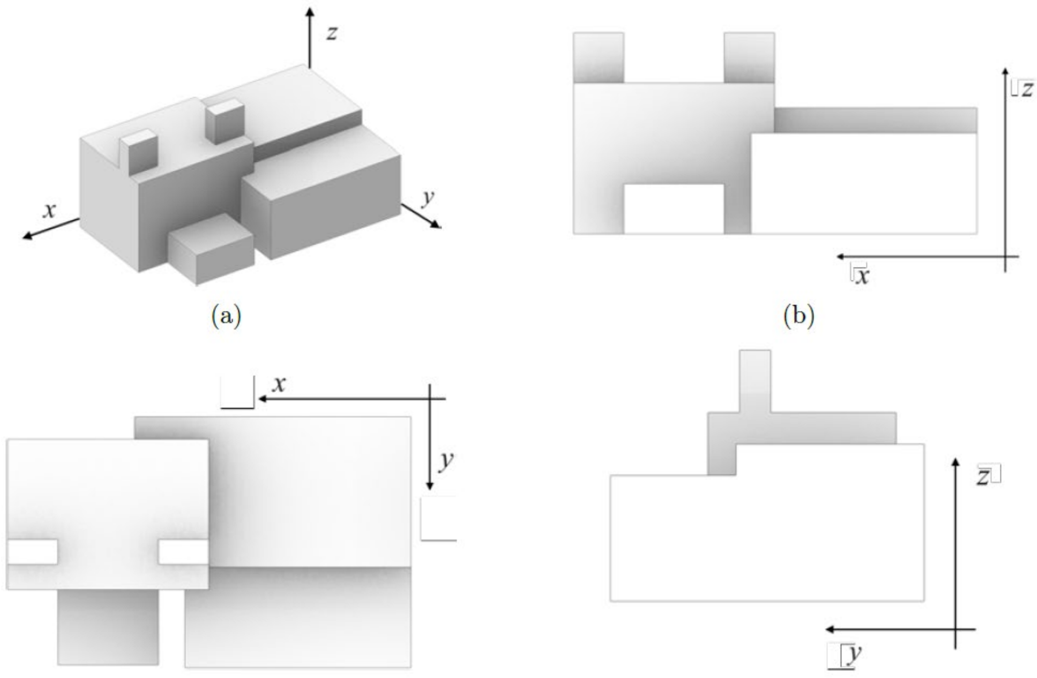
	diesen in den Code an der entsprechenden Stelle (facet normal) ein. Differenzierungsmöglichkeiten: Als Überprüfungsschritt könnte der Normalenvektor der Ebene auch bereits im Code angegeben sein, der von den SuS bestimmte Normalenvektor könnte dann abgeglichen werden.		• K5 Geförderte digitale Kompetenz: • 5.5

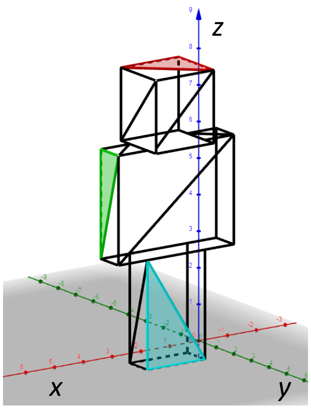
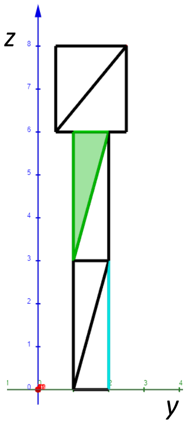
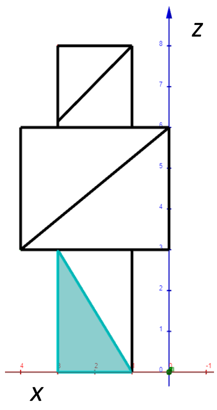
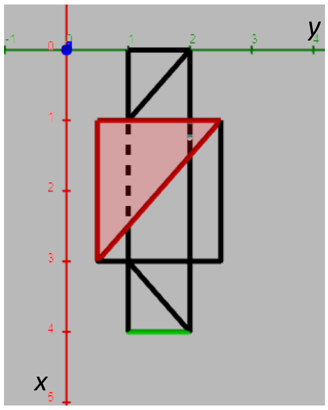
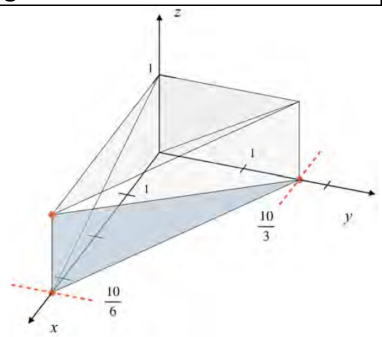
2

```
solid STL file

facet normal -1 0 0
    outer loop
        vertex 0 2 3
        vertex 0 2 0
        vertex 0 0 0
    endloop
endfacet
facet normal -1 0 0
    outer loop
        vertex 0 0 0
        vertex 0 0 3
        vertex 0 2 3
    endloop
endfacet
facet normal 0 -1 0
    outer loop
        vertex 0 0 3
        vertex 0 0 0
        vertex 1 0 0
    endloop
endfacet
facet normal 0 -1 0
    outer loop
        vertex 1 0 0
        vertex 1 0 3
        vertex 0 0 3
    endloop
endfacet

facet normal 1 0 0
    outer loop
        vertex 1 0 3
        vertex 1 0 0
        vertex 1 2 0
    endloop
endfacet
facet normal 1 0 0
    outer loop
        vertex 1 2 0
        vertex 1 2 3
        vertex 1 0 3
    endloop
endfacet
facet normal 0 1 0
    outer loop
        vertex 1 2 3
        vertex 1 2 0
        vertex 0 2 0
    endloop
endfacet
facet normal 0 1 0
    outer loop
        vertex 0 2 0
        vertex 0 2 3
        vertex 1 2 3
    endloop
endfacet
facet normal 0 0 1
    outer loop
        vertex 1 2 3
        vertex 0 2 3
        vertex 0 0 3
    endloop
endfacet
facet normal 0 0 1
    outer loop
        vertex 0 0 3
        vertex 1 0 3
        vertex 1 2 3
    endloop
endfacet
facet normal 0 0 -1
    outer loop
        vertex 1 0 0
        vertex 0 0 0
        vertex 0 2 0
    endloop
endfacet
facet normal 0 0 -1
    outer loop
        vertex 0 2 0
        vertex 1 2 0
        vertex 1 0 0
    endloop
endfacet

endsolid STL file
```

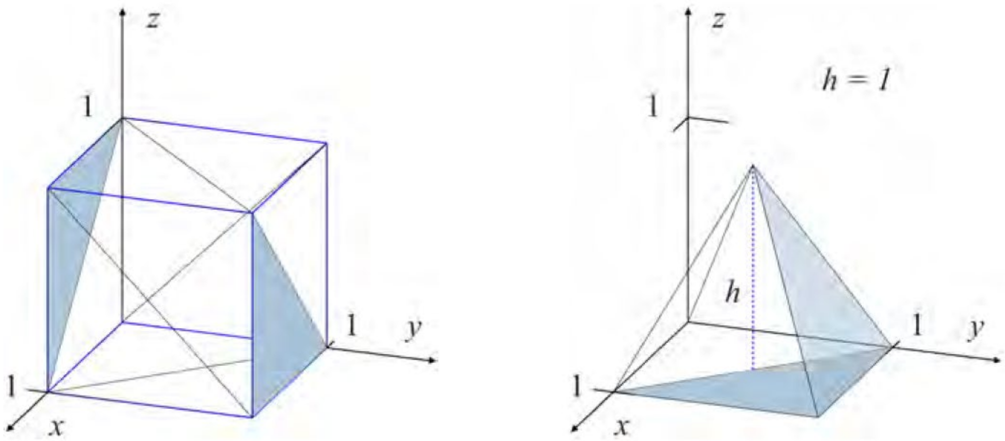
2.1	*Zeichnen Sie die dargestellten Punkte (vertex) aus der STL-Datei in ein geeignetes Koordinaten-system. Benennen Sie den Grund-körper, der durch diese Datei beschrieben wird.* Differenzierungsmöglichkeiten: • Farbliche Darstellung des Codes, sodass seine einzelnen Bestandteile schneller erkennbar sind. • *Die Punkte sind im Code in der Koordinatendarstellung* (x, y, z) *gegeben. Notieren Sie zunächst die*	Den SuS sollte auffallen, dass die Punkte die Oberfläche eines Quaders mit den Seitenlängen a=1, b=2, c=3 beschreiben. Im Anschluss an die Aufgabe, sollte erklärt werden, woher die Daten stammen und weshalb sie genutzt werden (Aufar-beitung eines visuellen Modells zu einem Daten-modell). In den Unterrichtsma-terialien wird der Code-	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K4 • K5 Geförderte digitale Kompetenzen: • K1.2 • K3.2 • K5.5

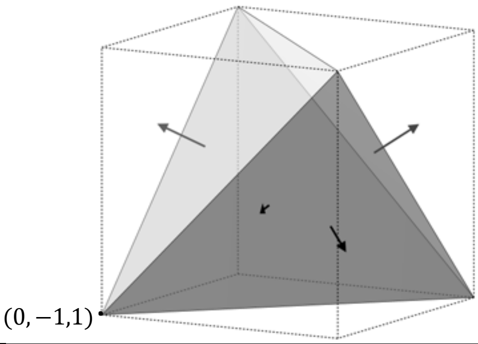
	Vektorschreibweise der Punkte: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. • *Verbinden Sie jeweils die drei Punkte eines Code-Blocks.* • *Prüfen Sie, ob die angegebenen Normalen-vektoren (facet normal) korrekt sind. Müssen Sie alle 12 angegeben Normalen-vektoren prüfen? Begründen Sie Ihre Antwort.*	Block durch Erläuter-ungen zu den einzelnen Begriffen ergänzt.	
2.2	*Geben Sie die Ebenen, in der die sechs Seitenflächen liegen, in der Drei-Punkte-Form an.* *Vergleichen Sie diese Angabe mit dem STL-Format.* *Welche Vor- und Nachteile können beide Formate haben? Bedenken Sie dabei, wofür die Formate genutzt werden können.* Differenzierungsmöglichkeiten: Weitere Beispiele von komplex-eren triangulierten Modellen könnten gegeben werden.	Den SuS wird ggf. auffal-len, dass in diesem Beispiel die Darstellung via der Ebenengleichun-gen weniger aufwendig ist als mithilfe des STL-Formats. Dies ändert sich jedoch sobald größere zusammengesetzte Kör-per (siehe Hase aus A1) betrachtet werden. Parameterdarstellungen wie die Drei-Punkte-Form können insbesondere verwendet werden, um jeden Punkt einer Ebene als abhängig von den Stütz- und Richtungsvek-toren darzustellen. Das STL-Format hingegen wird genutzt, um ein mathematisches Element (eine Ebene mit Orien-tierung durch den NV) für einen Rechner verständ-lich aufzubereiten.	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K4 • K5 • K6 Geförderte digitale Kompetenzen: • K1.2 • K5.2 • K5.5 • K6.2

3	 (a) (b) (c) (d)		
3.1	*Abbildung (a) zeigt ein Volumenmodell eines schlafenden Fuchses. Die Abbildungen (b)-(d) zeigen jeweils Standardansichten des zusammengesetzten Körpers (Vorne, Oben, Rechts). Da der Fuchs ausschließlich aus Quadern zusammengesetzt ist, sieht man in den verschiedenen Ansichten ebene Polygone. Zeichnen Sie in jeder Ansicht ein mögliches Dreiecksnetz ein, dass die gegebene Oberfläche vollkommen beschreibt.* Differenzierungsmöglichkeiten: • In Abbildung (b) könnte zur Orientierung der vordere Teil des Kopfes bereits mit Dreiecksflächen beschrieben sein. • Anstelle der Anforderung ein Dreiecksnetz einzuzeichnen, kann die Aufgabe gegeben werden, dass die SuS ein Dreiecksnetz mit so wenigen	In dieser Aufgabe müssen die SuS selber die gegebenen Oberflächen mithilfe eines Dreiecksnetzes beschreiben. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Auf Basis der verschiedenen Möglichkeiten kann über deren Sinnhaftigkeit diskutiert werden. So kann eine Fläche in beliebig viele Dreiecke geteilt werden, optimal ist aber eine so geringe Anzahl wie möglich.	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K2 • K4 • K5 Geförderte digitale Kompetenzen: • K3.2 • K5.2 • K5.3 • K5.5

	Dreiecken wie möglich einzeichnen sollen.		
4	 (a)  (b)	 (c)	 (d)
4.1	*Die Abbildungen zeigen eine Figur aus dem Computerspiel Minecraft im STL-Format. Geben Sie für jede markierte Dreiecksfläche eine Ebene an, in der diese liegt und bestimmen Sie die jeweiligen Normalenvektoren der Ebenen, die gemäß der STL-Formatierung die Orientierung der Flächen angeben?* Differenzierungsmöglichkeiten: • Abbildungen (b)-(d) können optional zur Unterstützung eingesetzt werden. • Es könnte zunächst eine der Flächen gemeinsam im UG betrachtet werden, um den SuS eine Lösungsskizze zu geben.	Um die Normalenvektoren der Dreiecksflächen zu bestimmen, müssen zunächst die Ebenengleichungen zu den Ebenen aufgestellt werden, in denen diese liegen.	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K4 • K5 • K6 Geförderte digitale Kompetenz: • K1.2
5			

```
solid STL file
[...]
facet normal 0.44721359549996 0.89442719099992 0.00000000000000
   outer loop
      vertex 3.33333333333333 0.00000000000000 1.00000000000000
      vertex 3.33333333333333 0.00000000000000 0.00000000000000
      vertex 0.00000000000000 1.66666666666667 0.00000000000000
   endloop
endfacet
[...]
endsolid STL file
```

5.1	*Die Abbildung zeigt ein Volumenmodell im STL-Format. Bestimmen Sie anhand der Grafik den Normaleneinheitsvektor der markierten Dreiecksfläche. Vergleichen Sie anschließend Ihr Ergebnis mit den Werten aus dem zugehörigen Code-Ausschnitt.* Differenzierungsmöglichkeit: • *Bestimmen Sie anhand der Grafik die Ebene, in der die markierte Dreiecksfläche liegt und bestimmen Sie anschließend deren Normaleneinheitsvektor.*	Um den Normaleneinheitsvektor der Dreiecksfläche zu bestimmen, muss zunächst die Ebene aufgestellt werden, in der sich diese befindet. Anschließend wird der Normalenvektor bestimmt und normiert. Da der Rechner die Werte nur in Dezimaldarstellung verarbeiten kann, kann es in den Darstellungen zu gewissen mathematischen Ungenauigkeiten kommen. Diese werden durch die Anzahl der Nachkommastellen zwar gering gehalten, aber können nicht ausgeschlossen werden.	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K4 • K5 • K6 Geförderte digitale Kompetenz: • K1.2
6	 (a) (b)		
6.1	*Abbildung (a) zeigt einen Würfel mit Seitenlänge 1. Bestimmen Sie zu jeder markierten Dreiecksfläche den zugehörigen Code-Ausschnitt (drei Eckpunkte sowie Normalenvektor der Fläche) des STL-Formats.* Differenzierungsmöglichkeiten: • *Bestimmen Sie zunächst die Ebenengleichungen der Ebenen, in der die*	Mithilfe des gegebenen Koordinatensystems können die SuS relevante Punkte des Würfels ablesen und mithilfe dieser die Normalenvektoren sowie die relevanten Code-Ausschnitte bestimmen. Ebenso kann hier, falls vorhanden, Computer eingesetzt werden, damit	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K4 • K5 Geförderte digitale Kompetenz: • K3.2

	Dreiecksflächen liegen und bestimmen Sie anschließend den Code-Ausschnitt. • *Orientieren Sie sich für das Aufschreiben des Code-Ausschnitts an den vorherigen STL-Formaten, die Sie gesehen haben (Aufgaben 1 & 3).*	die bestimmten Code-Blöcke selbstständig überprüft werden können.	
6.2	*Abbildung (b) zeigt eine Pyramide. Bestimmen Sie zu jeder markierten Dreiecksfläche den zugehörigen Code-Ausschnitt (drei Eckpunkte sowie Normalenvektor der Fläche) des STL-Formats.*	Siehe 5.1	Diese Aufgabe kann zur Differenzierung verwendet werden.
7		$E_1: \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$ $E_2: \frac{4}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}y + \frac{4}{\sqrt{3}}z = 0$ $E_3: -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ $E_4: -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 2\sqrt{3}$	
7.1	*Die Abbildung zeigt einen Tetraeder im STL-Format. Die einzelnen Dreiecksflächen liegen jeweils in Ebenen, die hier in der Hesseschen Normalenform angegeben sind. Geben Sie an, welche Dreiecksfläche in welcher Ebene liegt.* Differenzierungsmöglichkeiten: • *Nutzen Sie GeoGebra, um die Ebenen im Koordinatensystem zu betrachten.* • Für leistungsstarke Gruppen kann der gegebene Punkt entfernt werden. Hier muss anschließend diskutiert werden, warum eine eindeutige Aussage nicht möglich ist (die Figur ist drehungsinvariant um 180°)	Die SuS prüfen mithilfe von GeoGebra oder CAS den Verlauf der Ebenen und können damit die Dreiecksflächen den jeweiligen Ebenen zuordnen.	Leitidee: • Funktionaler Zusammenhang Geförderte mathematische Kompetenzen: • K4 • K5 Geförderte digitale Kompetenz: • K3.2

7.2	*Sie wollen den oben angegebenen Tetraeder nun mithilfe des 3D-Druckers drucken. Sie erhalten Fehlermeldungen in den Punkten $A = (-1\|-2\|2), B = (-1\|-2\|3)$ und $C = (-1\|-2\|4)$.* *Prüfen Sie rechnerisch, ob die Punkte innerhalb oder außerhalb des Tetraeders liegen.* Differenzierungsmöglichkeiten: • *Prüfen Sie zunächst mit GeoGebra und begründen Sie anschließend mit einer Rechnung ihre Behauptung.* • Es können weitere Punkte abgefragt werden.	Für diese Aufgabe sollte bereits die Abstandsberechnung mithilfe der Hesseschen Normalenform thematisiert worden sein. So können die SuS den Abstand d des Punktes zur Ebene berechnen und mithilfe der folgenden Regeln interpretieren: • d>0: Der Punkt und der Ursprung liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene. • d=0: Der Punkt liegt auf der Ebene. • d<0: Der Punkt und der Ursprung liegen auf derselben Seite der Ebene. Hierbei muss auf die Orientierung der Flächen, die durch den Normalenvektor gegeben ist (und visuell in die Darstellung eingezeichnet sind) eingegangen werden.	Leitidee: • Messen Geförderte mathematische Kompetenzen: • K2 • K4 • K5
8	*Gegeben seien die Punkte:* $A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix},$ $D = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$ *Stellen Sie diese Punkte in einem Koordinatensystem dar.* *Verbinden Sie die Punkte, so dass eine fünfeckige Figur entsteht.* *Teilen Sie jede Seitenfläche falls notwendig in Dreiecke und geben Sie den Code-Block für jedes Dreieck an.* Differenzierungsmöglichkeiten: • Es könnte hier ein kurzer Rückblick auf die Bestandteile des Codes (3 Eckpunkte, 1	Die SuS tragen die Punkte mit der Hand oder mithilfe einer DGS in ein kartesisches Koordinatensystem ein und verbinden die Punkte mithilfe von Strecken zu einer Pyramide mit einer viereckigen Grundfläche. Dementsprechend wird die Triangulation aus sechs Blöcken bestehen (vier dreieckige Seitenflächen und eine viereckige Grundfläche, die in zwei Dreiecke aufgeteilt wird). In der Besprechung dieser Aufgabe muss auf	Leitidee: • Raum und Form Geförderte mathematische Kompetenzen: • K3 • K4 • K5 Geförderte digitale Kompetenzen: • K3.2 • K5.1 • K5.4

	Flächennormale) eingeschoben werden. • Die SuS könnten anstatt der vorgegebenen Punkte eine vorgegebene Form erhalten, die sie in ein kartesisches Koordinatensystem übertragen müssen. Hier werden die SuS dann mit individuell gesetzten Eckpunkten arbeiten.	die Orientierung des Normalenvektors eingegangen werden. So muss dieser im STL-Format immer von der Figur wegzeigen. Dies kann mithilfe von GeoGebra überprüft werden. Ebenso kann hier, falls vorhanden, Computer eingesetzt werden, damit die bestimmten Code-Blöcke selbstständig überprüft werden können.	

Legende „Digitale Kompetenzen"

Für eine bessere Lesbarkeit wurden in der Auflistung der Aufgabenstellungen nur die Abkürzungen für die digitalen Kompetenzbereiche erwähnt. Hier sollen die angesprochenen Kompetenzen kurz erläutert werden[2].

- K1: Suchen, Verarbeiten und Aufbewahren
    - K1.2: Auswerten und Bewerten
- K3: Produzieren und Präsentieren
    - K3.2: Weiterverarbeiten und Integrieren
- K5: Problemlösen und Handeln
    - K5.1: Technische Probleme lösen
    - K5.2: Werkzeuge bedarfsgerecht einsetzen
    - K5.3: Eigene Defizite ermitteln und nach Lösungen suchen
    - K5.4: Digitale Werkzeuge und Medien zum Lernen, Arbeiten und Problemlösen nutzen
    - K5.5: Algorithmen erkennen und formulieren
- K6: Analysieren und Reflektieren
    - K6.2: Medien in der digitalen Welt verstehen und reflektieren

[2] Für weitere Informationen siehe: MBWK SH. 2018. *Ergänzung zu den Fachanforderungen. Medienkompetenz – Lernen mit digitalen Medien. Allgemein bildende Schulen, Sekundarstufe I, Sekundarstufe II*. Kiel: Schmidt & Klaunig.