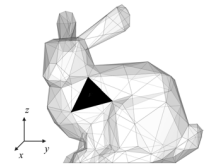


## Repræsentation af planer

Som en del af DiASper-projektet blev dette undervisningskoncept skabt til den analytiske geometriundervisningen på andet sekundærtrin. Konceptet er beregnet til 1.g/2.g og omfatter seks til otte undervisningstimer.



### Indhold og reference læseplanen:

STL-formatet kan forstås som et emne, der skabes ud fra skæringspunkterne mellem to specificerede planer. På grund af de fire givne parametre (tre hjørner, overfladens normalvektor) kan det tænkes som en praksisnær forbindelse mellem forskellige allerede kendte former for repræsentationen af planer. Først skal eleverne lære STL-formatets bestanddele at kende og skal kunne håndtere dem (kravområde I) samt indledningsvis identificere figurer ud fra de givne koder (kravområde II). Med udgangspunkt i denne viden kan eleverne derefter etablere deres egne koderstrukturer til at fremstille forudbestemte eller selvmodellerede figurer i STL-format (kravområde III). Forskellige kompetencer kan fremmes gennem implementering af STL-formatet: *Repræsentation og symbolbehandling* kan fremmes gennem situationsbestemt valg af og refleksion over fremstillingsformen for flader og *Benyttelse af hjælpemidler* kan fremmes gennem afgrænsning af begreber med reference til de forskellige anvendelsesområder for repræsentationer for planernes ligning og refleksion over muligheder og begrænsninger i forbindelse med fremstillingen.

### Læringsmæssige forudsætninger:

Eleverne har brug for viden om fremstilling og aflæsning af givne punkter i det tredimensionelle euklidiske rum. Desuden skal de kunne bestemme retningsvektorer og, med udgangspunkt heri, kende begrebet normalvektor og være i stand til at bestemme den. På samme måde har eleverne med udgangspunkt i punkter i det tredimensionelle rum, retningsvektorer og normalvektorer også brug for viden om forskellige repræsentationer af planeligninger. Derfor skal parameter- eller trepunktsformen og (Hessisk) normalform som minimum være kendte.

### Målsætninger:

Eleverne kan repræsentere planer ved hjælp af STL-formatet. Desuden kan de omdanne planer, der er angivet i én repræsentationsform, til en anden. Ved at udvide de kendte repræsentationer af planeligninger med STL-formatet og reflektere over de forskellige repræsentationer kan eleverne afhængigt af konteksten anvende forskellige repræsentationsformer på en hensigtsmæssig og forsvarlig måde.

### Fordelen ved at bruge software:

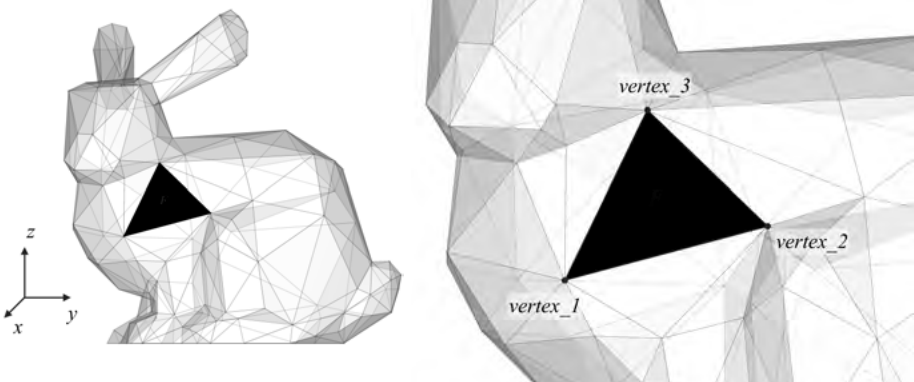
Ved at beskæftige sig med STL-formatet som et trianguleringsværktøj møder eleverne en mere praksisnær repræsentation af planer. Fokus bør her især være på formatets praktiske anvendelighed: Triangulering kan bruges til at approksimere et tredimensionelt objekt. Dette ville også være muligt ved at definere skæringer ved hjælp af allerede kendte repræsentationer af planer, men de geometriske oplysninger ville så ikke kunne læses eller behandles af digitale programmer (f.eks. CAD-programmer).





## Repræsentation af planer

### Mulige opgaver:

Nr.	Opgaveformulering	Elevaktiviteter	Reference til fagets krav
1	 <pre data-bbox="279 772 845 1064"> 1 solid STL file 2 [...] 3 facet normal 4   outer loop 5     vertex 1.0000000000000000 2.0000000000000000 5.5000000000000000 6     vertex 1.5000000000000000 4.5000000000000000 6.0000000000000000 7     vertex 0.7000000000000000 3.0000000000000000 7.5000000000000000 8   endloop 9 endfacet 10 [...] 11 endsolid STL file </pre>		
1.1	<p>Find fladen, som den trekantede overflade ligger i. Brug til formålet de givne oplysninger fra kodeblokken, der hører til denne overflade, som er angivet i STL-format. Bemærk, at hvert hjørnepunkt (vertex) er angivet i koordinatnotation i stedet for vektornotation. Angiv planen i parameterfremstilling.</p> <p>Differentieringsmulighed: Angiv i første omgang den trekantede overflades hjørnepunkter i vektornotation.</p>	<p>Ved hjælp af de angivne hjørnepunkter<sup>1</sup> i STL-filen kan det plan opstilles, som den trekantede overflade ligger i.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Kommunikation</li> <li>• Hjælpemidler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>
1.2	<p>Bestem normalvektoren til det plan, den trekantede overflade ligger i, for at færdiggøre koden i</p>	<p>Normalvektoren kan herfter findes ved hjælp af krydsproduktet.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p>

<sup>1</sup> I STL-format anvendes trekanter som grundlag for koden. Dette gøres, fordi der med n-hjørner med  $n > 3$  ikke er garanti for, at n-hjørnet er fladt, dvs. ligger i ét plan. Men i og med, at vi beskriver objektet ved hjælp af plane n-hjørner, anvendes trekanter, da der for hver trekant kan defineres et plan, som den ligger i.





## Repræsentation af planer

	<p><i>STL-formatet. Notér denne i koden det rigtige sted (facet normal).</i></p> <p>Differentieringsmulighed: Til kontrolformål kan planets normalvektor også allerede være angivet i koden, hvorefter den af eleverne fundne normalvektor kan matches.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>
2	<pre> 1.  solid STL file 2. 3.  facet normal -1 0 0 4.  outer loop 5.      vertex 0 2 3 6.      vertex 0 2 0 7.      vertex 0 0 0 8.  endloop 9.  endfacet 10. facet normal -1 0 0 11.  outer loop 12.      vertex 0 0 0 13.      vertex 0 0 3 14.      vertex 0 2 3 15.  endloop 16. endfacet 17. facet normal 0 -1 0 18.  outer loop 19.      vertex 0 0 3 20.      vertex 0 0 0 21.      vertex 1 0 0 22.  endloop 23. endfacet 24. facet normal 0 -1 0 25.  outer loop 26.      vertex 1 0 0 27.      vertex 1 0 3 28.      vertex 0 0 3 29.  endloop 30. endfacet                 </pre>	<pre> 31. facet normal 1 0 0 32.  outer loop 33.      vertex 1 0 3 34.      vertex 1 0 0 35.      vertex 1 2 0 36.  endloop 37. endfacet 38. facet normal 1 0 0 39.  outer loop 40.      vertex 1 2 0 41.      vertex 1 2 3 42.      vertex 1 0 3 43.  endloop 44. endfacet 45. facet normal 0 1 0 46.  outer loop 47.      vertex 1 2 3 48.      vertex 1 2 0 49.      vertex 0 2 0 50.  endloop 51. endfacet 52. facet normal 0 1 0 53.  outer loop 54.      vertex 0 2 0 55.      vertex 0 2 3 56.      vertex 1 2 3 57.  endloop 58. endfacet                 </pre>	<pre> 59. facet normal 0 0 1 60.  outer loop 61.      vertex 1 2 3 62.      vertex 0 2 3 63.      vertex 0 0 3 64.  endloop 65. endfacet 66. facet normal 0 0 1 67.  outer loop 68.      vertex 0 0 3 69.      vertex 1 0 3 70.      vertex 1 2 3 71.  endloop 72. endfacet 73. facet normal 0 0 -1 74.  outer loop 75.      vertex 1 0 0 76.      vertex 0 0 0 77.      vertex 0 2 0 78.  endloop 79. endfacet 80. facet normal 0 0 -1 81.  outer loop 82.      vertex 0 2 0 83.      vertex 1 2 0 84.      vertex 1 0 0 85.  endloop 86. endfacet 87. 88. endsolid STL file                 </pre>
2.1	<p><i>Tegn de viste punkter (vertex) fra STL-filen ind i et passende koordinatsystem. Angiv den geometriske grundfigur, der beskrives i denne fil.</i></p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Farvelagt fremstilling af koden, så de enkelte komponenter hurtigere kan identificeres.</li> <li>• Punkterne i koden er vist i koordinatfremstilling <math>(x, y, z)</math>.</li> </ul>	<p>Eleverne bør her lægge mærke til, at punkterne beskriver overfladen af en kasse med sidelængderne <math>a=1, b=2, c=3</math>. Efter opgaven bør det forklares, hvor dataene kommer fra, og hvorfor de anvendes (omdannes af en visuel model til en datamodel). I undervisningsmaterialet er kodeblokken suppleret med redegørelser for de enkelte termer.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Hjælpemidler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>



## Repræsentation af planer

	<p>Notér i første omgang vektornotationen af punkterne : <math>\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Forbind henholdsvis de tre punkter, der er angivet i en kodeblok.</li> <li>• Kontrollér, om de angivne normalvektorer (facet normal) er korrekte. Er det nødvendigt at kontrollere alle 12 angivne normalvektorer? Begrund dit svar.</li> </ul>		
2.2	<p>Angiv de planer, de seks sideoverflader ligger i, i parameterfremstilling. Sammenlign denne repræsentation med STL-formatet.</p> <p>Hvilke fordele og ulemper kan der være i forbindelse med formaterne? Husk her, hvad formaterne kan anvendes til.</p> <p>Differentieringsmulighed: Der kan angives yderligere eksempler på mere komplekse triangulerede modeller.</p>	<p>Eleverne vil måske bemærke, at fremstilling via planligningerne i dette eksempel er mindre kompleks end ved brug af STL-formatet. Dette ændrer sig dog, såsnart man tager større sammensatte figurer (se haren fra A1) i betragtning.</p> <p>Parameterfremstillinger kan især anvendes til at vise, at hvert punkt i en flade er afhængigt af det faste punkt og retningsvektorerne. STL-formatet bruges derimod til at paratgøre et matematisk element (et plan med orientering gennem normalvektoren) til en computer på en forståelig måde.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Kommunikation</li> <li>• Hjælpe midler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>





## Repræsentation af planer

<p>3</p>		
<p>3.1</p> <p><i>Figur (a) viser en volumenmodel af en sovende ræv. Figur (b)-(d) viser henholdsvis standardperspektiver af den sammensatte figur (forfra, oppefra, fra højre). Da ræven udelukkende er sammensat af kasser, ses plane polygoner i de forskellige fremstillinger. Indtegn i hvert perspektiv et muligt trekantnet, der fuldstændigt beskriver den givne overflade.</i></p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• I figur (b) kunne hovedets forreste del til orientering allerede være beskrevet med trekantede overflader.</li> <li>• I stedet for kravet om at tegne et trekantnet kan opgaven også være, at eleverne skal indtegne et trekantnet med så få trekanter som muligt.</li> </ul>	<p>I denne opgave skal eleverne selv beskrive de givne overflader ved hjælp af et trekantnet. Der er forskellige muligheder for dette. Anvendeligheden af de forskellige muligheder kan i den forbindelse diskuteres. En overflade kan fx opdeles i et vilkårligt antal trekanter, men det optimale er et så lille antal som muligt.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Problembehandling</li> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Hjælpemidler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>





## Repræsentation af planer

4	<p>(a) (b) (c) (d)</p>		
4.1	<p>Skitserne viser en figur fra computerspillet Minecraft i STL-Format. Angiv for hver markeret trekantoverflade et plan, som denne overflade ligger i, og find frem til planernes respektive normalvektorer, der ifølge STL-formatet angiver overfladernes orientering.</p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Figur (b)-(d) kan bruges eventuelt som støtte.</li> <li>Én af overfladerne kunne i første omgang behandles i fællesskab sammen med alle elever for at give dem en løsningsskitse.</li> </ul>	<p>For at finde frem til trekantoverfladernes normalvektorer må der først opstilles planligninger for planerne, som disse ligger i.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>Kommunikation</li> <li>Hjælpemidler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Analyse</li> </ul>
5		<pre> 1 solid STL file 2 [...] 3 facet normal 0.44721359549996 0.89442719099992 0.00000000000000 4   outer loop 5     vertex 3.33333333333333 0.00000000000000 1.00000000000000 6     vertex 3.33333333333333 0.00000000000000 0.00000000000000 7     vertex 0.00000000000000 1.66666666666667 0.00000000000000 8   endloop 9 endfacet 10 [...] 11 endsolid STL file </pre>	
5.1	<p>Figuren viser en volumenmodel i STL-formatet. Find ved hjælp af grafikken den markerede trekantoverflades normalenhedsvektor.</p>	<p>For at bestemme den trekantede overflades normalenhedsvektor må man først bestemme det plan, som den befinder</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p>





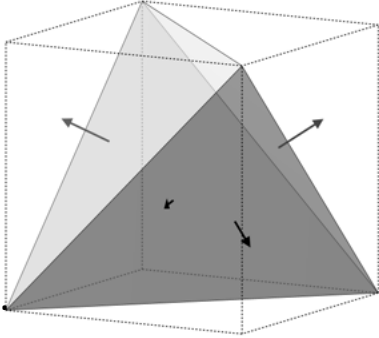
## Repræsentation af planer

	<p><i>Sammenlign derefter dit resultat med værdierne fra det tilhørende kodeudsnit.</i></p> <p>Differentieringsmulighed:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Find ved hjælp af grafikken det plan, som den markerede trekantoverflade ligger i, og bestem bagefter dens normal-énhedsvektor.</i></li> </ul>	<p>sig i. Derefter bestemmes og norméres normalvektoren. Da computeren kun kan behandle værdierne i decimalnotation, kan der forekomme visse matematiske unøjagtigheder i fremstillingerne. Disse holdes på et lavt niveau i kraft af antallet af decimaler, men kan ikke udelukkes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Kommunikation</li> <li>• Hjælpe midler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> </ul>
<p>6</p>	<p>(a)</p>	<p>(b)</p>	
<p>6.1</p>	<p><i>Figur (a) viser en terning med sidelængde 1. Find for hver markeret trekantet overflade det tilsvarende kodeafsnit (overfladens tre hjørnepunkter og normalvektor) i STL-formatet.</i></p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Bestem først planligningerne for de planer, som de trekantede overflader ligger i; bestem derefter kodeafsnittet.</i></li> <li>• <i>Med hensyn til at skrive kodeafsnittet ned, brug de tidligere STL-formater, du har set, som orientering (opgave 1 &amp; 3).</i></li> </ul>	<p>Ved hjælp af det givne koordinatsystem kan eleverne aflæse relevante punkter på terningen og bruge dem til at bestemme normalvektorerne og de relevante kodeafsnit. Her kan der også tages computere til hjælp for at tjekke kodeafsnittene.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Kommunikation</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>





## Repræsentation af planer

6.2	<p>Figur (b) viser en pyramide. Find for hver markéret trekantet overflade det tilhørende kodeafsnit (overfladens tre hjørnepunkter og normalvektor) i STL-formatet.</p>	Se 5.1	Denne opgave kann bruges for at differentiere.
7		$E_1 : \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$ $E_2 : \frac{4}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}y + \frac{4}{\sqrt{3}}z = 0$ $E_3 : -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ $E_4 : -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 2\sqrt{3}$	
7.1	<p>Figuren viser et tetraeder i STL-formatet. De enkelte trekantede overflade ligger henholdsvis i planer, der her an angivet i Hessisk normalform. Bestem, hvilken trekantet overflade der ligger i hvilket plan.</p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Brug GeoGebra for at se planerne i koordinatsystemet.</li> <li>• For specielt stærke elevgrupper kan det givne punkt fjernes. Her skal der så diskuteres, hvorfor et éntydigt udsagn ikke er muligt (figuren er invariant i forhold til en rotation på 180°).</li> </ul>	Ved hjælp af GeoGebra eller CAS kontrollerer eleverne planernes forløb og kan således allokere de trekantede overflader til de respektive planer.	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Kommunikation</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Problembehandling</li> </ul>
7.2	<p>Nu skal ovennævnte tetraeder printes ved hjælp af en 3D-printer. Der kommer imidlertid fejlmeldinger for punkterne <math>A = (-1 -2 2)</math>, <math>B = (-1 -2 3)</math> og <math>C = (-1 -2 4)</math>. Check gennem udregning, om punkterne ligger indenfor eller udenfor tetraederet.</p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Check i første omgang med GeoGebra og giv bagefter en</li> </ul>	<p>Med henblik på denne opgave bør emneområdet afstandsregning ved hjælp af den Hessiske normalform allerede være blevet behandlet. Således kan eleverne beregne punktets afstand <math>d</math> i forhold til fladen og fortolke den ved hjælp af følgende regler:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>d &gt; 0</math>: Punktet og oprindelsen <math>(0 0 0)</math></li> </ul>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Problembehandling</li> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Hjælpe midler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> </ul>





## Repræsentation af planer

	<p><i>begrundelse for dit postulat gennem et regnestykke.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Der kan spørges om yderligere punkter.</li> </ul>	<p>ligger på forskellige sider af planet.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>d=0</math>: Punktet ligger på planet.</li> <li>• <math>d&lt;0</math>: Punktet og oprindelsen <math>(0 0 0)</math> ligger på samme side af planet.</li> </ul> <p>Her skal der tages hensyn til den orientering af overfladerne, som er givet af normalvektoren (og er visuelt tegnet ind i fremstillingen).</p>	
8	<p><i>Disse punkter tages for givet:</i></p> $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$ $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ <p><i>Tegn disse punkter i et koordinatsystem. Forbind punkterne på en sådan måde, at der fremkommer en femkantet figur. Opdel, om nødvendigt, hver sideoverflade i trekanter og angiv kodeblokken for hver trekant.</i></p> <p>Differentieringsmuligheder:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En kort repetition af kodekomponenterne (3 hjørnepunkter, 1 normalvektor af overfladen) kan indskydes her.</li> <li>• I stedet for de givne punkter kan eleverne få tildelt en given form, som de skal overføre til et kartesisk koordinatsystem. Her skal eleverne så arbejde med individuelt definerede hjørnepunkter.</li> </ul>	<p>Eleverne indsætter punkterne i et kartesisk koordinatsystem manuelt eller ved hjælp af en dynamisk geometrisoftware (fx GeoGebra) og forbinder punkterne ved hjælp af linjer for at danne en pyramide med en firkantet grundflade. Trianguleringen vil derfor bestå af seks blokke (fire trekantede sideoverflader og en firkantet grundflade, der deles i to trekanter).</p> <p>I diskussionen af denne opgave burde orienteringen af normalvektoren tages op. I STL-formatet skal den således altid peges væk fra figuren. Dette kan kontrolleres ved hjælp af GeoGebra. På samme måde kan der her bruges computer, så de fundne kodeblokke kan checkes uafhængigt.</p>	<p>Kompetenceområde:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometri og måling</li> </ul> <p>Med til at fremme disse matematiske kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Modellering</li> <li>• Repræsentation og symbolbehandling</li> <li>• Hjælpe midler</li> </ul> <p>Med til at fremme disse digitale kompetencer:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse</li> <li>• Produktion og formidling</li> </ul>

